

1
2 **CEMENTED DOUBLET LENS AND DIFFRACTION PATTERNS OF THE**
3 **MAXIMUM SPATIAL FREQUENCIES OF THE FOURIER TRANSFORM.**
4
5
6
7

8 **RESUMEN**

9 Involucrando conceptos del método de propagación del espectro angular, considerando
10 el efecto que produce la abertura finita de una lente esférica doblete cementado o
11 transformadora, sobre la distribución de amplitud de un campo eléctrico difractado que
12 incide en ella, producido por un objeto extendido iluminado con ondas planas, se obtuvo el
13 modelo matemático de difracción de transformada de Fourier de frecuencias espaciales
14 máximas. Se presentan resultados de tipo experimental a base de imágenes de patrones de
15 difracción en distribución de intensidad grabados bajo condiciones específicas mediante el
16 método fotográfico, usando aberturas de geometría rectangular como objetos difractores.
17

18 **Palabras clave:** Lente doblete cementado, espectro angular, difracción, frecuencias
19 espaciales máximas.
20

21 **ABSTRACT**

22
23 In this research, with the incorporation of propagation method concepts of the angular
24 spectrum, and considering the effect produced by the finite apertures of a transforming
25 lens/cemented doublet spherical lens on the amplitude distribution of the diffracted electric
26 field which influences on it, produced by an extended object illuminated with plane waves;
27 the diffraction mathematical model of the Fourier transform of the maximum spatial
28 frequencies was obtained. The experimental results are presented; they are based on
29 diffraction pattern images in intensity distribution engraving in specific conditions through
30 the photographic method and using rectangular geometry apertures as diffractor objects.
31

32 **Keywords:** doublet cemented lens, angular spectrum, diffraction, maximum spatial
33 frequencies
34
35

36 **INTRODUCCIÓN**

37 El fenómeno de difracción ocurre donde quiera que un frente de onda
38 electromagnética es obstruido, es decir, si en el transcurso de su trayectoria de propagación
39 interacciona con objetos opacos o transparentes, se alteran porciones de dicho frente en
40 amplitud o en fase. Los diferentes segmentos del frente de onda que se propagan más allá
41 del objeto u objetos interfieren y producen una densidad de energía particular, cuya
42 distribución espacial de intensidad se denomina patrón de difracción Zárate, (2011). Debido
43 a la extensión finita de la pupila asociada a una lente esférica o transformadora, existen dos
44 problemas principales, el efecto de viñeteado y la capacidad de propagar frecuencias

45 espaciales mayores a un valor particular, que surgen en la propagación del campo de
46 difracción, al incidir en la lente transformadora. Zárate y Cornejo, (2011) publicaron una
47 solución a estos problemas, a través de una función de amplitud definida como una integral
48 de convolución de frecuencias espaciales máximas, distribuida en un plano a la entrada de
49 una lente esférica. Se reporta el análisis de la propagación del campo de difracción de
50 frecuencias espaciales máximas, a través de un doblete cementado o lente transformadora;
51 así como su propagación hasta el plano en el que finalmente se distribuye.

52 Comastri *et al*, (2007) en su artículo sobre el uso de frecuencias espaciales en óptica
53 de Fourier y óptica Fisiológica, analizan y comparan entre sí las definiciones de funciones
54 transferencia y frecuencias espaciales con las relaciones entre frecuencias de corte y límites
55 de resolución que se utilizan en ambas disciplinas; además muestran una aplicación de la
56 teoría de Fourier en el diseño óptico de microscopios limitados por producción y otra en
57 pruebas de la calidad visual en sensibilidad al contraste. Zárate, (2011) en su trabajo de
58 Tesis doctoral dio referencia al uso de un doblete cementado como lente transformadora y
59 frecuencias espaciales paraxiales. Zárate *et al* (2019) reportaron un análisis teórico de
60 propagación mediante el método del espectro angular y la producción en forma
61 experimental de patrones de difracción con frecuencias espaciales paraxiales, de
62 distribución de irradiancia tipo Bessel de orden cero y de primer orden. Los autores antes
63 referidos no proporcionan información respecto a frecuencias máximas.

64 65 **DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO**

66
67 Se hace uso del método de propagación del espectro angular para producir el
68 modelo matemático de difracción. Para esto, se considera una abertura o un objeto difractor
69 delgado como se ilustra en la figura 1. Zárate y Cornejo, (2011) establecieron que la
70 distribución del campo difractado por el objeto es:

$$71 \quad E_1(x_0, y_0) = E_0 t_0(x_0, y_0) \quad (1)$$

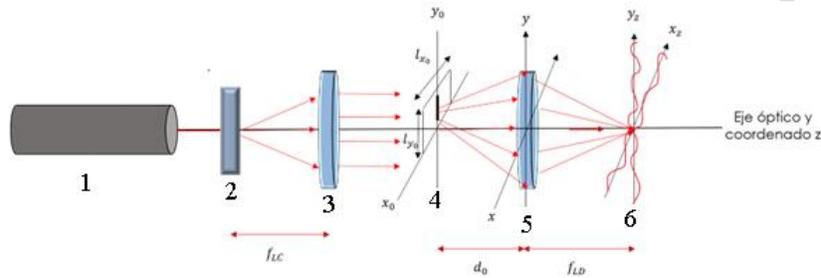
72
73 Mientras que la propagación del campo hasta el plano xy justo a la entrada del
74 doblete cementado tomaron en cuenta la aceptación de una frecuencia espacial de valor
75 máximo, producida por la sección eficaz finita de la lente esférica transformadora, tiene una
76 distribución de amplitud descrita por la expresión,

77 $E_{d0}(x, y) =$
 78 $\frac{E_0 e^{ikd_0}}{i\lambda d_0} e^{\frac{ik}{2d_0}(x^2+y^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_0(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2d_0}(x_0^2+y_0^2)} e^{-i2\pi(u_{max} x_0 + v_{max} y_0)} dx_0 dy_0$ (2)

79
 80 Zárata y Cornejo, (2011) propusieron que $(x + x_2) \ll d_0$ y $(y + y_2) \ll d_0$, entonces
 81 las frecuencias espaciales máximas se escriben en términos de las frecuencias espaciales
 82 paraxiales $\frac{x}{\lambda d_0}$ y $\frac{y}{\lambda d_0}$; y las frecuencias espaciales no paraxiales $\frac{x_2}{\lambda d_0}$ y $\frac{y_2}{\lambda d_0}$, en la forma:

83 $u_{max} = \frac{x}{\lambda d_0} + \frac{x_2}{\lambda d_0}$ (3), $v_{max} = \frac{y}{\lambda d_0} + \frac{y_2}{\lambda d_0}$. (3)

84



85

Figura 1. Esquema óptico: 1) Láser, 2) filtro, 3) colimador, 4) objeto difractor, 5) lente transformadora, 6) plano de distribución.

86

87

88

89 En su trabajo de Tesis Doctoral de Zarate, (2011) estableció que la distribución de
 90 amplitud del campo difractado y propagado a través del doblete cementado, bajo la
 91 condición de que la forma geométrica asociada a la lente transformadora sea
 92 $circ\left[\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\right] = 1$ y que además no posea aberraciones, es decir que la función de
 93 aberración sea $W(x, y) = 0$, puede ser descrita con la siguiente ecuación:

93 $E_l(x, y) = \frac{E_0 e^{ik[f_{LD} + n_{L1}\Delta_{0L1} + n_{o2}\Delta_{0L2}]} e^{ik\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)\left(\frac{1}{d_0} - \frac{1}{f_{LD}}\right)}}{i\lambda d_0 f_{LD}}$
 94 $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_0(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2d_0}(x_0^2+y_0^2)} e^{-i2\pi[u_{max} x_0 + v_{max} y_0]} dx_0 dy_0$ (4)

95

96 Mientras que, el campo propagado una distancia z del plano xy al plano $x_z y_z$ en el
 97 que se distribuye definitivamente, después de operar y separar la dependencia de x, y y
 x_0, y_0 de se obtiene la expresión:

$$\begin{aligned}
& E_z(x_z, y_z) \\
&= \frac{E_0 e^{ik[d_0+z+n_{L1}\Delta_{L1}+n_{L2}\Delta_{L2}]} e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2+y_z^2)}}{i^2 \lambda^2 z d_0} \\
&\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_0(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2d_0}(x_0^2+y_0^2)} e^{-i2\pi\left(\frac{x_2}{\lambda d_0}x_0 + \frac{y_2}{\lambda d_0}y_0\right)} dx_0 dy_0 \\
&\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ik}{2}(x^2+y^2)\left(\frac{1}{d_0} + \frac{1}{z} - \frac{1}{f}\right)} e^{-i2\pi\left[\left(\frac{x}{\lambda d_0} + \frac{x}{\lambda z}\right)x + \left(\frac{y}{\lambda d_0} + \frac{y}{\lambda z}\right)y\right]} dx dy
\end{aligned} \tag{5}$$

98

99 Para realizar la integración se propone los aspectos siguientes $u_2 = \left(\frac{x_0}{\lambda d_0} + \frac{x_z}{\lambda z}\right)$,

$$100 \quad v_2 = \left(\frac{y_0}{\lambda d_0} + \frac{y_z}{\lambda z}\right), \quad d_0 = f_{LD} \text{ así como la ecuación integral } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2 - \beta x} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}$$

101 Spiegel, (1980). Después de realizar operaciones y de simplificar se determina la ecuación
102 siguiente:

103

$$\begin{aligned}
& E_z(x_z, y_z) = \left[\frac{E_0 e^{ik[f_{LD}+z+n_{L1}\Delta_{L1}+n_{L2}\Delta_{L2}]} e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2+y_z^2)}}{i\lambda f_{LD}} \right] \\
& \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_0(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2f_{LD}}(x_0^2+y_0^2)\left(1-\frac{z}{f_{LD}}\right)} e^{-i2\pi\left(\frac{x_2}{\lambda f_{LD}} + \frac{x_z}{\lambda z}\right)x_0 + \left(\frac{y_2}{\lambda f_{LD}} + \frac{y_z}{\lambda z}\right)y_0} dx_0 dy_0
\end{aligned} \tag{6}$$

105

106 Utilizando las frecuencias espaciales máximas definidas como $u_{m\acute{a}x} = \left(\frac{x_2}{\lambda f_{LD}} + \frac{x_z}{\lambda z}\right)$

107 y $v_{m\acute{a}x} = \left(\frac{y_2}{\lambda f_{LD}} + \frac{y_z}{\lambda z}\right)$ la ecuación (7) se reescribe en la forma:

108

$$\begin{aligned}
& G_z(u_{m\acute{a}x}, v_{m\acute{a}x}) \\
&= \frac{E_0 e^{ik[f_{LD}+z+n_{L1}\Delta_{L1}+n_{L2}\Delta_{L2}]} e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2+y_z^2)}}{i\lambda f_{LD}} e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2+y_z^2)\left(1-\frac{z}{f_{LD}}\right)} \mathfrak{F}\left\{t_0(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2f_{LD}}(x_0^2+y_0^2)\left(1-\frac{z}{f_{LD}}\right)}\right\}_{u_{m\acute{a}x}, v_{m\acute{a}x}}.
\end{aligned} \tag{7}$$

109

110

111 Proponiendo ahora que la distribución del campo $G_z(u_{m\acute{a}x}, v_{m\acute{a}x})$ se realice a la

112 distancia focal posterior del doblete cementado, es decir $z = f_{LD}$, se tendrá que la

113 transformada de Fourier del producto de funciones es la convolución de ellas, esto es

$$114 \quad [\mathfrak{F}\{t_0(x_0, y_0)\} \otimes \mathfrak{F}(1,1)]_{u_{m\acute{a}x}, v_{m\acute{a}x}} = \mathfrak{F}\{t_0(x_0, y_0)\} \otimes \delta(u_{m\acute{a}x}, v_{m\acute{a}x}) = \mathfrak{F}\{t_0(x_0, y_0)\} \text{ Gaskill,}$$

115 (1978), con estas condiciones podemos expresar a la ecuación (8) como:

116

$$117 \quad G_z(u_{m\acute{a}x}, v_{m\acute{a}x}) = \frac{E_0 e^{ik[2f_{LD}+n_{L1}\Delta_{L1}+n_{L2}\Delta_{L2}]} e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2+y_z^2)}}{i\lambda f_{LD}} \mathfrak{F}\{t_0(x_0, y_0)\}_{u_{m\acute{a}x}, v_{m\acute{a}x}} \tag{8}$$

118

119 La ecuación (8) se interpreta como el espectro de difracción de transformada de Fourier
 120 de la función de transmitancia $t_0(x_0y_0)$ asociada al objeto difractor, con distribución en el
 121 espacio de Fourier de frecuencias máximas $u_{m\acute{a}x}, v_{m\acute{a}x}$. Se ha propagado desde el plano
 122 objeto una longitud de camino óptico dado por la siguiente expresión $2f_{LD} + n_{L1}\Delta_{L1} +$
 123 $n_{L2}\Delta_{L2}$; además su distribución esférica de fase dada por el exponente del factor $e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2 + y_z^2)}$
 124 y está desfasado en $\frac{\pi}{2}$ radianes.

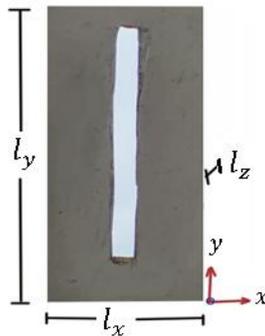
125
 126
 127

RESULTADOS TEÓRICOS

128 Para obtener resultados teóricos específicos la forma funcional del modelo de
 129 difracción para el caso donde consideramos una abertura rectangular de base l_x , altura l_y y
 130 de un pequeño espesor l_z figura 2, se utiliza la función rectangular: $t_0(x_0y_0) =$
 131 $l_z \left[\left(l_y \text{rect} \left(\frac{x_0}{l_x} \right) \right) \left(l_x \text{rect} \left(\frac{y_0}{l_y} \right) \right) \right]$, donde de acuerdo con su definición la podemos expresar
 132 de la siguiente forma Gaskill, (1978):

$$133 \quad t_0(x_0, y_0) = \text{rect} \left(\frac{x_0}{l_x}, \frac{y_0}{l_y} \right) = \begin{cases} 1, & \text{si } -\frac{l_x}{2} \leq x_0 \leq \frac{l_x}{2}, -\frac{l_y}{2} \leq y_0 \leq \frac{l_y}{2} \\ \frac{1}{2}, & \text{si } |x_0| = \frac{l_x}{2}, \dots, |y_0| = \frac{l_y}{2} \\ 0, & \text{en otro lado.} \end{cases} \quad (9)$$

134



135

Figura 2. Abertura rectangular.

136

137 La transformada de Fourier bidimensional se determina usando el teorema de
 138 escalamiento quedando en la forma
 139 $\mathfrak{F}\{t_0(x_0y_0)\}_{u_{m\acute{a}x}, v_{m\acute{a}x}} = l_z [l_y l_x \text{sin } c(l_x u_{m\acute{a}x})] [l_x l_y \text{sin } c(l_y v_{m\acute{a}x})]$ Gaskill, (1978). Al
 140 sustituir este resultado en la ecuación (8) se determina la expresión:

$$G_z(u_{m\acute{a}x}, v_{m\acute{a}x}) = \frac{E_0 l_z (l_x l_y)^2 e^{ik[2f_{LD} + n_{L1} \Delta L_1 + n_{L2} \Delta L_2]} e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2 + y_z^2)}}{i \lambda f_{LD}} \sin c(l_x u_{m\acute{a}x}, l_y v_{m\acute{a}x}) \quad (10)$$

La distribución del campo de difracción en el espacio de frecuencias espaciales es una función seno cociente distribuida en el espacio de frecuencias espaciales máximas definida por la ecuación (11). La distribución de intensidad es:

$$I_Z(u, v) = \left(\frac{E_0 l_z}{\lambda f_{LD}} \right)^2 (l_x l_y)^4 [\sin c^2(l_x u_{m\acute{a}x}, l_y v_{m\acute{a}x})] \quad (11)$$

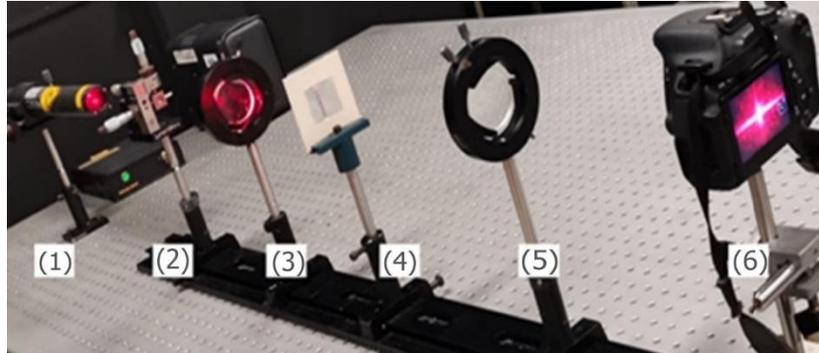
RESULTADOS EXPERIMENTALES

Para comprobar el modelo matemático de intensidad ecuación (11), se hizo uso del método experimental mediante la implementación del arreglo óptico coherente ilustrado en la figura 3, que se describe en la forma siguiente: el haz de luz de láser de He-Ne ($\lambda = 632\text{nm}$) proveniente de la cavidad (1), es ampliado y filtrado de ruido óptico en (2) con un lente objetivo de microscopio 40x y un pinhole de $50\mu\text{m}$ de diámetro. Después el haz se propaga e incide sobre la lente colimadora (3), el cual es un doblete cementado de 25 cm de distancia focal, produciéndose aquí frentes de ondas planas, con una amplitud constante; mismos que iluminan al objeto difractor (4). Las ondas de luz difractadas por el objeto se propagan hasta incidir sobre la lente transformadora (5), que también es un doblete acromático cementado de distancia focal 30cm; mismo que propaga el campo de ondas difractado hasta el plano de distribución (6) en el cual se distribuye y fotografía el patrón de difracción en intensidad.

Se usaron tres aberturas rectangulares como objetos difractores como se muestra en la figura 2, con el mismo espesor $l_z = 0.5\text{mm}$, fabricadas a mano en lámina de aluminio. La imagen de la figura 4 corresponde al patrón de difracción producido por una abertura rectangular con dimensiones lineales $l_x = 2\text{mm}$ de ancho y $l_y = 3\text{cm}$ de altura, a la distancia focal de $f_{LD} = 30\text{cm}$ del doblete cementado, con un tiempo de exposición de $(1/4000)\text{s}$. En tanto que la imagen de la figura 5, es la del patrón de difracción en distribución de intensidad, de una segunda abertura rectangular con dimensiones lineales $l_x = 8\text{mm}$ de ancho y de altura $l_y = 3\text{cm}$, el tiempo de exposición fue también de $(1/4000)\text{s}$. La imagen de la figura 6 corresponde al patrón de difracción producido por una tercera abertura rectangular cuyas dimensiones lineales fueron $l_x = 3\text{cm}$ de ancho y de altura $l_y = 3\text{cm}$, el tiempo de exposición fue también de $(1/4000)\text{s}$. Cada patrón de

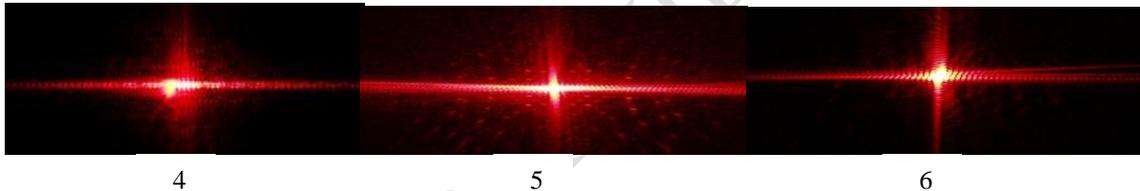
173 difracción en distribución de intensidad fue grabado haciendo uso del método fotográfico
174 con cámara electrónica de 18 megapíxeles.

175
176



177 Figura 3. Arreglo óptico experimental: 1) Láser, 2) filtro, 3) colimador, 4)
178 objeto difractor, 5) lente trasformadora, 6) plano de distribución.

179
180
181



182
183

184 Figura 4, 5, 6. Patrones de difracción producidos con aberturas rectangulares de ancho $l_x = 2mm$;
185 $l_x = 8mm$ y $l_x = 3cm$ respectivamente, con misma altura $l_y = 3cm$ y mismo espesor $l_z = 0.5mm$.

186
187

186 CONCLUSIONES

187
188

189 El resultado teórico relevante es haber simplificado la distribución de amplitud del
190 campo eléctrico asociado a las ondas difractadas definido por la ecuación (5), como una
191 distribución de amplitud en el espacio de Fourier frecuencias espaciales máximas ver
192 ecuación (8) y a su vez, ser interpretado como un caso especial de convolución de
193 transformadas definido por la transformada de Fourier de la función de transmitancia
194 asociada al objeto difractor. Este resultado demuestra la necesidad de realizar una etapa de
195 simulación para resolver el problema de forma más completa

195

196 En lo que respecta a los resultados experimentales, las imágenes de cada patrón en
197 distribución de intensidad Figuras 4, 5 y 6 proporcionan información relevante, una de ellas
198 es que conforme el ancho de cada abertura rectangular como objeto difractor va creciendo
los máximos y mínimos secundarios van disminuyendo, persistiendo los máximos centrales

199 y algunos máximos y mínimos secundarios próximos a los centrales. Otro aspecto que
200 resulta relevante es que a los objetos difractores se les asoció una función matemática, pero
201 ellos no poseen geometría rectangular perfecta, ya que fueron producidos de forma manual
202 y no con un método de fracturado especial. Resulta interesante que las deformaciones que
203 muestra la distribución de las franjas de máxima y mínima intensidad permiten visualizar
204 los defectos de la abertura en sus dimensiones lineales.

205

206

REFERENCIAS

207

Zárate E. A. (2011), *Estudio de patrones de difracción en la evaluación de Aberturas (Tesis Doctoral)*. INAOE Santa Mara Tonantzintla, Puebla, México. pp 5-190.

208

209

210

Zárate Esteban Andrés, Cornejo Rodríguez Alejandro (2011), La abertura de una lente, su efecto en el espectro de difracción, frecuencia espacial y viñeteado. *Revista Mexicana de Física*. 57, 491-498.

211

212

213

214

Camestri S. A., Simon J. M., Martin G., Colombo E., Issolio L., Santillan J., Aguirre R. (2007), Definición y uso de frecuencias espaciales en Óptica de Fourier y en Óptica Fisiológica, *Óptica pura y aplicada* 40(1), 119-128.

215

216

217

218

Zárate Esteban Andrés, Angulo Córdova Quintiliano, Gutiérrez Tepach Gerardo, y Hernández Nolasco José Adán (2019), Modelo matemático de difracción en región convergente y divergente de una lente esférica. *Revista Mexicana de Física* 65, 299-306.

219

220

221

222

223

Spiegel Murray R. (1980), *Cálculo superior*, McGraw-Hill.

224

225

Gaskill Jack. D. (1978), *Linear systems Fourier transforms and optics*, John Wiley and Sons, pp 150-217

226

227

228

229