

 ISSN NO. 2320-5407	Journal Homepage: - www.journalijar.com INTERNATIONAL JOURNAL OF ADVANCED RESEARCH (IJAR) Article DOI: 10.21474/IJAR01/11561 DOI URL: http://dx.doi.org/10.21474/IJAR01/11561	
---	--	---

RESEARCH ARTICLE

EXPLORATION DES ROUTES VERS LE CHAOS DANS UNE ENCEINTE ANNULAIRE THERMIQUEMENT ET MECANIQUEMENT ENTRAINEE

Khady Tall, Pr. Cheikh Mbow and Pr. Mamadou Lamine Sow

Manuscript Info

Manuscript History

Received: 25 June 2020

Final Accepted: 30 July 2020

Published: August 2020

Abstract

L'instabilité de Bénard-Rayleigh a été étudiée dans des enceintes concentriques dont les parois sont soit fixes, soit en mouvement de rotations. Et c'est ce qui rend intéressant notre étude qui porte sur l'étude de l'instabilité de Bénard-Rayleigh dans un domaine excentré et où la paroi intérieure subit un mouvement de rotation et celle qui se trouve à l'extérieur est fixe : nous observerons alors la convection naturelle et celle forcée rotatoire. La particularité de notre étude est : ➤ L'enceinte étudiée est excentrée (en remarquant que les enceintes concentriques sont des cas où $r=r_1-r_2=0$), ➤ L'une des parois est mobile (sachant que quand la vitesse de rotation est nulle, on a une paroi fixe). Ce qui rend notre étude plus générale. La simulation des isothermes, nous permet d'observer que : ➤ Pour un nombre de Reynolds égale à 1, les cellules de Bénard sont observées en suivant le CAL pour de faibles nombre de Richardson. Cependant, le système devient chaotique pour de grands nombres de Richardson (au-delà de $Ri=10$). ➤ Pour un nombre de Reynolds égale à 0.1, les cellules de Bénard sont observées assez lentement par rapport au nombre de Richardson. Les cellules se forment lentement quand le nombre de Richardson augmente, pour ensuite devenir chaotique au-delà de $Ri=100$. Concernant la simulation de la fonction courant, nous avons eu à observer un système stable pour des nombre de Reynolds inférieure à 0.3 et au-delà de ce seuil, le système devient perturbé et chaotique. Le modèle établi nous permet de voir que deux points assez proches, ont des trajectoires très distinctes, d'où la présence du chaos et nous noterons que ces résultats sont observés dans le repère bipolaire alors si nous revenons dans le repère cartésien, il est clair que le chaos se ferait beaucoup plus sentir.

Copy Right, IJAR, 2020,. All rights reserved.

Introduction:-

L'instabilité de Rayleigh-Bénard, ou convection naturelle est une instabilité thermo-convective susceptible de se développer dans un milieu fluide soumis à un gradient de température déstabilisant. Elle se traduit par la formation de structures convectives appelées cellules de Bénard. Ce problème a été étudié expérimentalement par Bénard et théoriquement par Rayleigh.

Corresponding Author:- Khady Tall

a-principe physique :

Soit un fluide contenu entre deux parois parallèles, horizontales, soumis à un gradient thermique de sorte que la paroi inférieure soit à une température supérieure à la température de la paroi supérieure. Sous l'effet du chauffage de la paroi inférieure, les particules fluides situées à proximité de la paroi inférieure voient leur masse volumique décroître et sous l'effet de la poussée d'Archimède, tendent à remonter vers la paroi supérieure. À partir d'un certain seuil du gradient thermique, ce mouvement des particules fluides induit une déstabilisation du milieu fluide sous la forme de rouleaux thermo-convectifs aussi appelés cellules de Bénard.

L'instabilité de Bénard-Rayleigh a été étudiée dans des enceintes concentriques dont les parois sont soit fixes, soit en mouvement de rotations. Et c'est ce qui rend intéressant notre étude qui porte sur l'étude de l'instabilité de Bénard-Rayleigh dans un domaine excentré et où la paroi intérieure subit un mouvement de rotation et celle qui se trouve à l'extérieur est fixe : nous observerons alors la convection naturelle et celle forcée rotatoire.

La particularité de notre étude est :

1. L'enceinte étudiée est excentrée (en remarquant que les enceintes concentriques sont des cas où $r_1 = r_2 = 0$),
2. L'une des parois est mobile (sachant que quand la vitesse de rotation est nulle, on a une paroi fixe).

Ce qui rend notre étude plus générale.

b-stabilité du problème :

La stabilité du problème de Bénard-Rayleigh (classique) est pilotée par le nombre de Rayleigh Ra . Celui-ci étant proportionnel au gradient de température, plus la température de la plaque inférieure sera élevée plus le nombre de Rayleigh sera grand. Pour des valeurs de Ra suffisamment petites, le système est stable et on retrouve la solution de conduction. Lorsque le nombre de Rayleigh dépasse le seuil critique $Ra = 1708$ le système devient instable et on observe la formation de structures convectives appelées cellules de Bénard. La valeur du seuil critique tombe à 1101 pour une surface libre.

Dans le cadre de notre étude, nous verrons que la stabilité de notre problème sera pilotée ici par le nombre de Richardson.

c-Notes et références :

1. L'étude théorique de Rayleigh est fondamentale, mais Willard Gibbs a montré par la suite que la convection de Bénard est en fait contrôlée par la diminution de la tension superficielle de l'eau quand la température augmente (effet Marangoni).
2. H. Bénard, Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportant de la chaleur par convection en régime permanent, Annales de chimie et de physique, Série 7(23) : pp62-144, 1901
3. J. W. Rayleigh, On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, Sixth series, Vol.32-no.192 : pp.529-546, 1916.
4. A. V. Getling, « Rayleigh-Bénard convection », sur Scholarpedia.

Modélisation mathématique :

Nous nous proposons d'étudier la convection thermique mixte rotative d'un fluide confiné dans un espace annulaire délimité par deux cylindres d'axes horizontaux excentrés initialement en équilibre thermodynamique à la température T_i (voir figure 1).

À partir d'un instant $t = t_0$, on porte le cylindre extérieur à une température $T_e > T_i$ et en même temps on entraîne le cylindre intérieur dans une rotation autour de son axe avec une vitesse angulaire ω_c . Il se produit alors une convection thermique naturelle induite par le gradient de température entre les deux cylindres auquel se superpose une convection rotative. Dans le but de traduire plus simplement les conditions aux limites nous allons utiliser une transformation conforme qui permet de ramener nos frontières curvilignes en des surfaces planes caractérisées par des coordonnées constantes. Pour ce faire nous allons utiliser des coordonnées bipolaires.

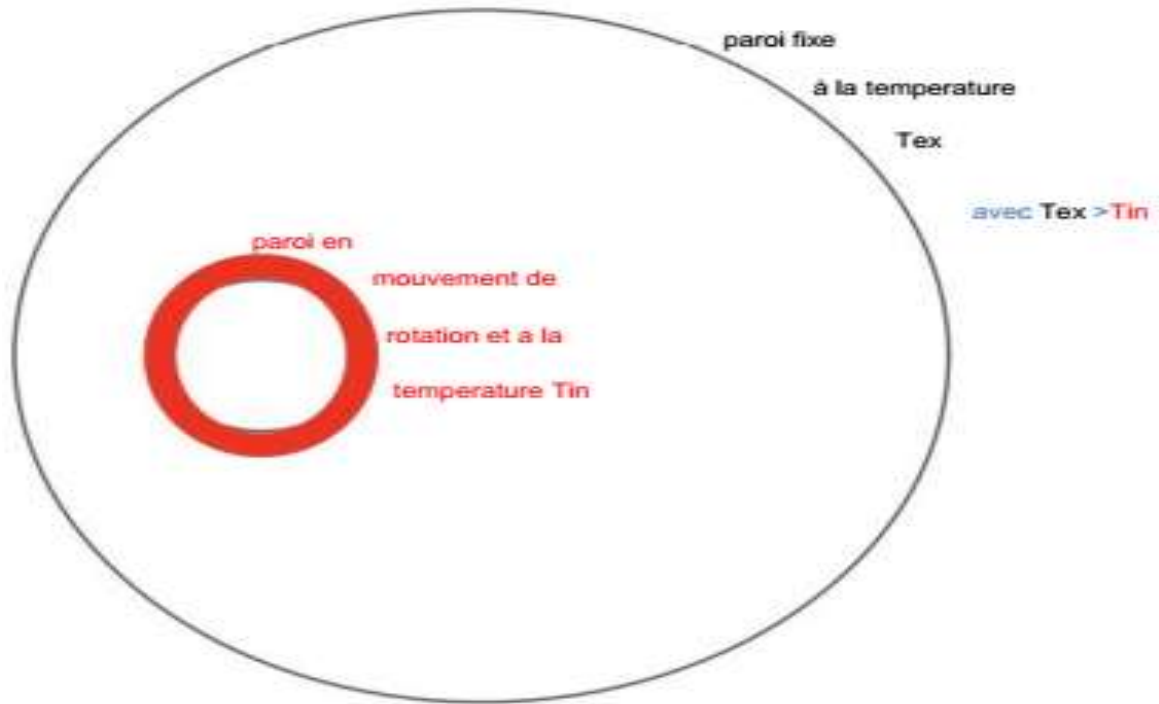


Figure 1:- Représentation géométrique du problème.

Dans un tel système de coordonnées les cylindres seront repérés par les lignes de coordonnées $\eta = \eta_e$ et $\eta = \eta_i$

$$\begin{cases} \left[x - \frac{a}{\tanh(\eta)} \right]^2 + y^2 = \left[\frac{a}{\sinh(\eta)} \right]^2 \\ \left[y + \frac{a}{\tan(\epsilon)} \right]^2 + x^2 = \left[\frac{a}{\sin(\epsilon)} \right]^2 \end{cases}$$

Equation 1 :

équations qui définissent la géométrie de la paroi utilisée :

1. Le fluide est incompressible et newtonien,
2. L'écoulement est bidimensionnel et se fait dans le plan vertical,
3. On néglige le travail de la pression et la dissipation visqueuse.

D'après les hypothèses ci-dessus, les équations qui régissent les transferts d'impulsion et de chaleur, dans le système de coordonnées bipolaires, s'écrivent :

○ **Equation de Navier-Stokes :**

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{1}{h} \left(v_\eta \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} + v_\epsilon \frac{\partial \Omega}{\partial \epsilon} \right) = \frac{\nu}{h^2} * \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \epsilon^2} \right] + \frac{\beta * g}{h^2} * \left\{ \frac{\partial T}{\partial \epsilon} (\sin(\epsilon) \sinh(\eta)) - \frac{\partial T}{\partial \eta} (1 - \cos(\epsilon) \cosh(\eta)) \right\}$$

Equation 2 :

○ **Equation de la chaleur :**

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{h} \left(v_\eta \frac{\partial T}{\partial \eta} + v_\epsilon \frac{\partial T}{\partial \epsilon} \right) = \frac{\alpha}{h^2} * \left[\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \epsilon^2} \right]$$

Equation 3 :

Puisque l'écoulement est supposé bidimensionnel et plan, nous allons formuler le problème dynamique en utilisant l'équation qui lie la vorticité et la fonction de courant, définie par :

○ **Equation de la fonction courant :**

$$\Omega = -\frac{1}{h^2} * \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \epsilon^2} \right] \text{Equation 4}$$

Avec

$$v_\eta = \frac{1}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} ; v_\epsilon = -\frac{1}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \text{Equation 5}$$

Dans ces relations h désigne le facteur d'échelle et est défini par :

$$h = a \cdot [\cosh(\eta) - \cos(\varepsilon)] \quad \text{Equation 6}$$

Le système est complété par les conditions initiales et aux limites suivantes :

Conditions initiales :

$$v_\eta(\eta, \varepsilon; t_0) = v_\varepsilon(\eta, \varepsilon; t_0) = \Omega(\eta, \varepsilon; t_0) = \Psi(\eta, \varepsilon; t_0) = 0 \quad \text{Equation 7}$$

$$T(\eta, \varepsilon; t_0) = T_i \quad \text{Equation 8}$$

Conditions aux limites

Sur le cylindre intérieur $\eta = \eta_i$

Conditions hydrodynamiques

$$v_\eta(\eta_i, \varepsilon; t) = 0 \quad \text{Equation 9}$$

$$v_\varepsilon(\eta_i, \varepsilon; t) = r_i \cdot \omega_c \quad \text{Equation 10}$$

De ces conditions cinématiques nous déduisons les conditions sur ψ et sur Ω . Nous aurons

$$\Psi(\eta_i, \varepsilon; t) = C_i(t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = -h \cdot r_i \cdot \omega_c \quad \text{Equation 11}$$

$$\Omega(\eta_i, \varepsilon; t) = -\frac{1}{h^2} * \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} \quad \text{Equation 12}$$

Conditions thermiques

$$T(\eta_i, \varepsilon; t) = T_i \quad \text{Equation 13}$$

Sur le cylindre extérieur $\eta = \eta_e$

Conditions hydrodynamiques

$$v_\eta(\eta_e, \varepsilon; t) = 0 \quad \text{Equation 14}$$

$$v_\varepsilon(\eta_e, \varepsilon; t) = 0 \quad \text{Equation 15}$$

Il vient alors

$$\Psi(\eta_e, \varepsilon; t) = C_e(t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = 0 \quad \text{Equation 16}$$

$$\Omega(\eta_e, \varepsilon; t) = -\frac{1}{h^2} * \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} \quad \text{Equation 17}$$

Conditions thermiques :

$$T(\eta_e, \varepsilon; t) = T_e \quad \text{Equation 18}$$

Adimensionnalisation de ces équations :

La théorie de l'adimensionnalisation est généralement utilisée quand le système est trop complexe pour permettre une résolution complète des équations fondamentales, ou bien lorsque son comportement est chaotique, l'analyse dimensionnelle donne accès de façon simple à des relations entre les différentes grandeurs caractérisant ce système. En passant à l'adimensionnalisation (en omettant de mettre volontairement les * pour simplifier l'écriture) de ces équations on obtient :

a-grandeurs caractéristiques :

v_r, L, Ω_c Sont respectivement la vitesse caractéristique, la longueur caractéristique et le vecteur tourbillon caractéristique.

$\tau = \frac{1}{\omega_c}$ est le temps caractéristique des effets d'inertie et $H = \frac{h}{a}$

b-Equations adimensionnalisées :

➤ **Equation du mouvement :**

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{1}{H} * \left(v_\eta \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} + v_\varepsilon \frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon} \right) = \frac{1}{R_e} * \frac{1}{H^2} * \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varepsilon^2} \right] + R_i * \frac{1}{H^2} * \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon} (\sin(\varepsilon) \sinh(\eta)) - \frac{\partial \theta}{\partial \eta} (1 - \cos \varepsilon \sinh \eta) \right\} \quad \text{Equation 19}$$

➤ **Equation de la fonction de courant :**

$$\Omega = -\frac{1}{H^2} * \vec{\nabla}^2(\psi) \quad \text{Equation 20}$$

➤ **Equation de la chaleur :**

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{H} * \left(v_\eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + v_\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon} \right) = \frac{1}{P_e} * \frac{1}{H^2} * \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varepsilon^2} \right] \quad \text{Equation 22}$$

Avec

$R_e = \frac{\rho_0 \omega_c L^2}{\mu}$ est le nombre de Reynolds rotatif,

$Gr = \frac{\beta g (T_1 - T_0) L^3}{\nu^2}$ est le nombre de Grashoff,

$R_i = \frac{Gr}{R_e^2}$ est le nombre de Richardson.

c-Conditions initiales et aux limites adimensionnalisées :

➤ Conditions initiales :

$$v_\eta(\eta, \varepsilon; t_0) = v_\varepsilon(\eta, \varepsilon; t_0) = \Omega(\eta, \varepsilon; t_0) = \Psi(\eta, \varepsilon; t_0) = 0$$

➤ Conditions aux limites :

◆ Sur le cylindre intérieur $\eta = \eta_i$:

• Conditions hydrodynamiques :

$$v_\eta(\eta_i, \varepsilon; t) = 0$$

$$v_\varepsilon(\eta_i, \varepsilon; t) = 1$$

De ces conditions cinématiques nous déduisons les conditions sur ψ et sur Ω . Nous aurons :

$$\Psi(\eta_i, \varepsilon; t) = Ci(\varepsilon; t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = -H$$

$$\Omega(\eta_i, \varepsilon; t) = -\frac{1}{H^2} * \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}$$

• Conditions thermiques :

▪ Sur le cylindre extérieur $\eta = \eta_e$:

• Conditions hydrodynamiques :

$$v_\eta(\eta_e, \varepsilon; t) = v_\varepsilon(\eta_e, \varepsilon; t) = 0$$

Il vient alors :

$$\Psi(\eta_e, \varepsilon; t) = Ce(\varepsilon; t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = 0$$

$$\Omega(\eta_e, \varepsilon; t) = -\frac{1}{H^2} * \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}$$

• Conditions thermiques :

$$\theta(\eta_e, \varepsilon; t) = 1 \text{ et } \theta = \theta_b(\eta, \varepsilon) + \theta_p(\eta, \varepsilon, t) = \text{température de base} + \text{température perturbée}.$$

Dans les conditions de base, l'équation de Navier-Stokes nous permet de dire que :

$$\theta_b = a * \eta + b. \text{Équation 23}$$

D'où l'obtention du système suivant :

$$\begin{cases} 0 = a * \eta_i + b \\ 1 = a * \eta_e + b \end{cases} \text{ ce qui donne}$$

$$a = \frac{1}{\eta_e - \eta_i} \text{ et } b = -\frac{\eta_i}{\eta_e - \eta_i}$$

$$\begin{aligned} & d'où: \\ \theta_b &= \frac{1}{\eta_e - \eta_i} (-\eta_i + \eta) \end{aligned}$$

Nous pouvons alors poser que :

✓ $\theta_p = R_i * \theta_{pert}$ (en supposant que la température perturbée est proportionnelle au nombre de Richardson),

✓ $\psi_p(\eta, \varepsilon; t) = R_i * \psi_{pert}$ (en supposant que la fonction courant perturbée est proportionnelle au nombre de Richardson).

D'où :

$$✓ \quad v_n(\eta, \varepsilon; t) = \frac{1}{H} * R_i * v_{n_{pert}}$$

$$✓ \quad v_\varepsilon(\eta, \varepsilon; t) = -\frac{1}{H} * R_i * v_{\varepsilon_{pert}}$$

Soit en posant :

$$v_{\varepsilon \text{ base}} = \frac{1}{H} * \frac{r_i * \omega_c}{\eta_i - \eta_e} * (\eta - \eta_e) \text{Équation 24}$$

D'où :

$$\psi_{\text{base}} = -\frac{r_i * \omega_c}{\eta_i - \eta_e} * (-\eta * \eta_e + \frac{1}{2} * \eta^2 + cst)$$

Hors :

$$\psi_{\text{base}}(\eta = \eta_e) = 0$$

D'où :

$$\psi_{\text{base}} = \frac{r_i * \omega_c}{\eta_i - \eta_e} * (+\eta * \eta_e - \frac{1}{2} * \eta^2 - \frac{1}{2} * \eta_e^2) \text{Équation 25}$$

$$v_{\eta \text{ base}}(\eta, \varepsilon; t) = 0$$

Et

$$\Omega_{\text{base}} = \frac{r_i * \omega_c}{\eta_i - \eta_e} \text{Équation 26}$$

L'étude de laperturbation nous pousse à poser (d'une manière plus générale) :

$$\checkmark \quad \theta_p = \sum_{n=0}^n (R_i * \theta_{\text{pert}})^n$$

$$\checkmark \quad \psi_p = \sum_{n=0}^n (R_i * \psi_{\text{pert}})^n$$

On s'arrêtera à l'ordre 1 et tout ce qui est R_i^n où $n > 1$ sera négligé !!!

Notons que R_i est le nombre de Richardson qui, ici est notre paramétré de contrôle.

$$\theta_b = \frac{1}{\eta_e - \eta_i} (\eta_i - \eta)$$

Nous pouvons alors poser que :

$$\theta_p = R_i * \theta_{\text{pert}}$$

Soit en supposant que :

$$\psi_p(\eta, \varepsilon; t) = R_i * \psi_{\text{pert}}$$

D'où :

$$\checkmark \quad v_n(\eta, \varepsilon; t) = \frac{1}{H} * R_i * v_{n \text{ pert}}$$

$$\checkmark \quad v_\varepsilon(\eta, \varepsilon; t) = -\frac{1}{H} * R_i * v_{\varepsilon \text{ pert}}$$

Rappelons que :

$$\checkmark \quad \eta_1 = \ln(2) \text{ est un cercle de centre } (5/3, 0) \text{ et de rayon } 4/3 \text{ (cercle extérieur).}$$

$$\checkmark \quad \eta_2 = \ln(7) \text{ est un cercle de } (25/24, 0) \text{ et de rayon } 7/24 \text{ (cercle intérieur).}$$

Sachant que l'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{H} * \left(v_\eta * \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + v_\varepsilon * \left(\frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon} \right) \right) = \frac{1}{P_e * H^2} * \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varepsilon^2} \right)$$

En remplaçant l'équation par les expressions obtenues à la base et celle obtenues à l'état perturbé, on obtient :

$$\frac{\partial \theta_{\text{pert}}}{\partial t} * R_i + \frac{1}{H} * \left((R_i * v_{\eta \text{ pert}}) * \left(\frac{\partial \theta_{\text{pert}}}{\partial \eta} * R_i + \frac{1}{\eta_e - \eta_i} \right) + \left[R_i * v_{\varepsilon \text{ pert}} + \frac{1}{H} * \frac{r_i * \omega_c}{\eta_i - \eta_e} * (\eta - \eta_e) \right] * \left(\frac{\partial \theta_{\text{pert}}}{\partial \varepsilon} \right) * R_i \right) = \frac{1}{P_e * H^2} * \left(\frac{\partial^2 \theta_{\text{pert}}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \theta_{\text{pert}}}{\partial \varepsilon^2} \right) * R_i$$

$$\frac{\partial \theta_{\text{pert}}}{\partial t} + \frac{1}{H} * \left((R_i * v_{\eta \text{ pert}} * \frac{\partial \theta_{\text{pert}}}{\partial \eta} + \frac{1}{\eta_e - \eta_i} * v_{\eta \text{ pert}} + R_i * v_{\varepsilon \text{ pert}} * \frac{\partial \theta_{\text{pert}}}{\partial \varepsilon} + \frac{1}{H} * \frac{r_i * \omega_c}{\eta_i - \eta_e} * (\eta - \eta_e) * \frac{\partial \theta_{\text{pert}}}{\partial \varepsilon} \right) = \frac{1}{P_e * H^2} * \left(\frac{\partial^2 \theta_{\text{pert}}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \theta_{\text{pert}}}{\partial \varepsilon^2} \right)$$

L'équation de la chaleur devient :

$$\frac{\partial \theta_{\text{pert}}}{\partial t} * R_i + \frac{1}{H^2} * \left\{ -\frac{1}{\eta_e - \eta_i} * R_i * \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} + \frac{r_i * \omega_c}{\eta_i - \eta_e} * (\eta - \eta_e) * \frac{\partial \theta_{\text{pert}}}{\partial \eta} * R_i - \frac{1}{\eta_e - \eta_i} * \frac{r_i * \omega_c}{\eta_i - \eta_e} * (\eta - \eta_e) \right\} = \frac{1}{P_e * H^2} * \left(\frac{\partial^2 \theta_{\text{pert}}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \theta_{\text{pert}}}{\partial \varepsilon^2} \right) * R_i \text{Équation 27}$$

Passons maintenant à l'étude de l'équation du mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_p}{\partial t} + \frac{1}{H} * \left(v_\eta \frac{\partial \Omega_p}{\partial \eta} + v_\varepsilon \frac{\partial \Omega_p}{\partial \varepsilon} \right) \\ = \frac{1}{R_e} * \frac{1}{H^2} * \left[\frac{\partial^2 \Omega_p}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Omega_p}{\partial \varepsilon^2} \right] + R_i * \frac{1}{H^2} \\ * \left\{ \frac{\partial \theta_p}{\partial \varepsilon} (\sin(\varepsilon) \sinh(\eta)) - \left(\frac{\partial \theta_p}{\partial \eta} - \frac{1}{(\eta_e - \eta_i)} \right) * (1 - \cos(\varepsilon) \sinh(\eta)) \right\} \end{aligned}$$

En faisant la même démarche que précédemment, on a :

$$\begin{aligned} R_i * \frac{\partial \Omega_{pert}}{\partial t} + \frac{1}{H} * \left([R_i * v_{\eta_{pert}}] * R_i * \frac{\partial \Omega_{pert}}{\partial \eta} + \left[R_i * v_{\varepsilon_{pert}} + \frac{1}{H} * \frac{r_i * \omega_c}{\eta_i - \eta_e} * (\eta - \eta_e) \right] * R_i * \frac{\partial \Omega_{pert}}{\partial \varepsilon} \right) \\ = \frac{1}{R_e} * \frac{1}{H^2} * R_i \left[\frac{\partial^2 \Omega_{pert}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Omega_{pert}}{\partial \varepsilon^2} \right] + R_i^2 * \frac{1}{H^2} \\ * \left\{ \frac{\partial \theta_{pert}}{\partial \varepsilon} (\sin(\varepsilon) \sinh(\eta)) - \left(\frac{\partial \theta_{pert}}{\partial \eta} \right) * (1 - \cos(\varepsilon) \sinh(\eta)) \right\} + R_i * \frac{1}{H^2} * \frac{1}{(\eta_e - \eta_i)} \\ * (1 - \cos(\varepsilon) \sinh(\eta)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_i * \frac{\partial \Omega_{pert}}{\partial t} + \frac{1}{H} * \left(\left[R_i^2 * v_{\eta_{pert}} * \frac{\partial \Omega_{pert}}{\partial \eta} + R_i * \frac{1}{H} * \frac{r_i * \omega_c}{\eta_i - \eta_e} * (\eta - \eta_e) * \frac{\partial \Omega_{pert}}{\partial \varepsilon} + R_i^2 * v_{\varepsilon_{pert}} * \frac{\partial \Omega_{pert}}{\partial \varepsilon} \right] \right) \\ = \frac{1}{R_e} * \frac{1}{H^2} * R_i \left[\frac{\partial^2 \Omega_{pert}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Omega_{pert}}{\partial \varepsilon^2} \right] + R_i^2 * \frac{1}{H^2} \\ * \left\{ \frac{\partial \theta_{pert}}{\partial \varepsilon} (\sin(\varepsilon) \sinh(\eta)) - \left(\frac{\partial \theta_{pert}}{\partial \eta} \right) * (1 - \cos(\varepsilon) \sinh(\eta)) \right\} + R_i * \frac{1}{H^2} * \frac{1}{(\eta_e - \eta_i)} \\ * (1 - \cos(\varepsilon) \sinh(\eta)) \end{aligned}$$

En négligeant les termes en R_i^2 , on a :

$$\frac{\partial \Omega_{pert}}{\partial t} + \frac{1}{H^2} * \left(\left[\frac{r_i * \omega_c}{\eta_i - \eta_e} * (\eta - \eta_e) * \frac{\partial \Omega_{pert}}{\partial \varepsilon} \right] \right) = \frac{1}{R_e} * \frac{1}{H^2} \left[\frac{\partial^2 \Omega_{pert}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Omega_{pert}}{\partial \varepsilon^2} \right] + \frac{1}{H^2} * \frac{1}{(\eta_e - \eta_i)} * (1 - \cos(\varepsilon) \sinh(\eta))$$

Équation 28

Sachant que :

$$\Omega_{pert} = -\frac{1}{H^2} * \left(\frac{\partial^2 \psi_{pert}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi_{pert}}{\partial \varepsilon^2} \right)$$

Posons que :

$$\psi_{pert} = X(t) * \sinh((\eta - \ln(2))) * \cos(k * \varepsilon) \quad \text{Équation 29}$$

D'où :

$$\Omega_{pert} = -\frac{(1-k^2)}{H^2} * \psi_{pert} \quad \text{Équation 30}$$

Nous utiliserons $k=2$ dans le cadre de la simulation numérique.

NB : les équations perturbées seront utilisés pour simuler les isothermes de températures et des fonctions courants !

d-etablissement du système qui va régir notre modèle :

Pour ce faire, nous allons poser :

$$\psi_{pert} = X(t) * \sinh((-\eta + \ln(2))) * \sin(k * \varepsilon),$$

$$\text{D'où : } \Omega_{pert} = -\frac{(1-k^2)}{H^2} * \psi_{pert}$$

$$\theta_{pert} = Y(t) * \sinh((\eta - \ln(7))) * \sin(k * \varepsilon).$$

d1-l'étude de l'équation de la chaleur, nous donnera :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{H} * \left(v_\eta * \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + v_\varepsilon * \left(\frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon} \right) \right) = \frac{1}{P_e * H^2} * \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varepsilon^2} \right)$$

Après remplacement des expressions de la température et celle de la fonction courant, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial t} * \sinh((\eta - \ln(7)) * \sin(k * \varepsilon) + \frac{1}{H^2} \\ * \{k * Y(t) * X(t) * \sinh((-\eta + \ln(2)) * \cos(k * \varepsilon) * \cosh((\eta - \ln(7)) * \sin(k * \varepsilon) + k * Y(t) \\ * X(t) * \cosh((-\eta + \ln(2)) * \sin(k * \varepsilon) * \sinh((\eta - \ln(7)) * \cos(k * \varepsilon))\} \\ = -\frac{k^2}{P_e * H^2} * Y(t) * \sinh((\eta - \ln(7)) * \sin(k * \varepsilon) \end{aligned}$$

Sachant que :

$$\begin{aligned} \cosh(x + y) &= \cosh(x) * \cosh(y) + \sinh(x) * \sinh(y) \text{ Et} \\ \sinh(x + y) &= \sinh(x) * \cosh(y) + \cosh(x) * \sinh(y) \end{aligned}$$

L'équation de la chaleur devient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial t} * \sinh((\eta - \ln(7)) * \sin(k * \varepsilon) + \frac{1}{H^2} \\ * \{k * Y(t) * X(t) * \cosh((-\eta + \ln(2) + \eta - \ln(7)) * \cos(k * \varepsilon) * \sin(k * \varepsilon) * \} \\ = -\frac{k^2}{P_e * H^2} * Y(t) * \sinh((\eta - \ln(7)) * \sin(k * \varepsilon) \end{aligned}$$

On a finalement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial t} * \sinh((\eta - \ln(7)) * \sin(k * \varepsilon) + \frac{1}{H^2} * \{k * Y(t) * X(t) * \cosh((\ln(2) - \ln(7)) * \cos(k * \varepsilon) * \sin(k * \\ \varepsilon) = -\frac{k^2}{P_e * H^2} * Y(t) * \sinh((\eta - \ln(7)) * \sin(k * \varepsilon) \end{aligned} \quad \text{Equation 31}$$

d2-passons à l'équation du mouvement :

Rappelons l'expression de l'équation du mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_p}{\partial t} + \frac{1}{H} * \left(v_\eta \frac{\partial \Omega_p}{\partial \eta} + v_\varepsilon \frac{\partial \Omega_p}{\partial \varepsilon} \right) \\ = \frac{1}{R_e} * \frac{1}{H^2} * \left[\frac{\partial^2 \Omega_p}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Omega_p}{\partial \varepsilon^2} \right] + R_i * \frac{1}{H^2} \\ * \left\{ \frac{\partial \theta_p}{\partial \varepsilon} (\sin(\varepsilon) \sinh(\eta)) - \left(\frac{\partial \theta_p}{\partial \eta} - \frac{1}{(\eta_e - \eta_i)} \right) * (1 - \cos(\varepsilon) \sinh(\eta)) \right\} \end{aligned}$$

L'équation du mouvement devient alors :

$$\begin{aligned} -\frac{(1 - k^2)}{H^2} * \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{(1 - k^2)}{H^4} * \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} * \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \frac{\partial \psi}{\partial \eta} * \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \right) \\ = -\frac{1}{R_e} * \frac{(1 - k^2)}{H^4} * \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon^2} \right] + R_i * \frac{1}{H^2} \\ * \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon} (\sin(\varepsilon) \sinh(\eta)) - \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{1}{(\eta_e - \eta_i)} \right) * (1 - \cos(\varepsilon) \sinh(\eta)) \right\} \\ -\frac{(1 - k^2)}{H^2} * \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{R_e} * \frac{(1 - k^2)}{H^4} * \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon^2} \right] + R_i * \frac{1}{H^2} \\ * \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon} (\sin(\varepsilon) \sinh(\eta)) - \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{1}{(\eta_e - \eta_i)} \right) * (1 - \cos(\varepsilon) \sinh(\eta)) \right\} \end{aligned}$$

Soit en remplaçant, on a:

$$\begin{aligned} -\frac{(1 - k^2)}{H^2} * \frac{\partial X}{\partial t} * \sinh((-\eta + \ln(2)) * \sin(k * \varepsilon) \\ = -\frac{1}{R_e} * \frac{(1 - k^2)^2}{H^4} * X(t) * \sinh((-\eta + \ln(2)) * \sin(k * \varepsilon) + R_i * \frac{1}{H^2} \\ * \left\{ k * Y(t) * \sinh((\eta - \ln(7)) * \cos(k * \varepsilon) * (\sin(\varepsilon) \sinh(\eta)) \right. \\ \left. - \left(Y(t) * \cosh((\eta - \ln(7)) * \sin(k * \varepsilon) - \frac{1}{(\eta_e - \eta_i)} \right) * (1 - \cos(\varepsilon) \sinh(\eta)) \right\} \end{aligned}$$

Equation du mouvement devient alors:

$$-\frac{(1-k^2)}{H^2} * \frac{\partial X}{\partial t} * \sinh((- \eta + \ln(2)) * \sin(k * \varepsilon)) = -\frac{1}{R_e} * \frac{(1-k^2)^2}{H^4} * X(t) * \sinh((- \eta + \ln(2)) * \sin(k * \varepsilon)) + R_i * \frac{1}{H^2} * \left\{ k * Y(t) * \sinh((\eta - \ln(7)) * \cos(k * \varepsilon)) * (\sin(\varepsilon) \sinh(\eta)) - Y(t) * \cosh((\eta - \ln(7)) * \sin(k * \varepsilon)) * (1 - \cos \varepsilon \sinh \eta) + 1 \eta e^{-\eta t} (1 - \cos \varepsilon \sinh \eta) \right\} \text{equation 32}$$

Passons à l'intégration de notre système (où $k=3$) :

$$\begin{cases} -0.595 * \frac{\partial Y}{\partial t} = -1.71 * Y(t) * X(t) - \frac{12.36}{P_e} * Y(t) \\ 2.57 * \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{43.21}{R_e} * X(t) + 0.59 * R_i * Y(t) - 0.55 \end{cases}$$

On a finalement :

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial t} = 2.87 * Y(t) * X(t) + \frac{29.67}{R_e} * Y(t) \\ \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{16.81}{R_e} * X(t) + 0.23 * R_i * Y(t) - 0.21 \end{cases} \text{equation 33}$$

3-Modélisation numérique : Pour l'isotherme:

Rappelons l'équation de la chaleur que nous avons eu à établir :

$$\frac{\partial \theta_{pert}}{\partial t} * R_i -$$

Après simulation numérique, nous obtenons les résultats suivants :

NB : Le nombre de Peclet est fixé comme étant égale à Peclet/Reynolds=0.7 .

a-pour Reynolds=1 :

Dans ce cas, Peclet=0.7 .

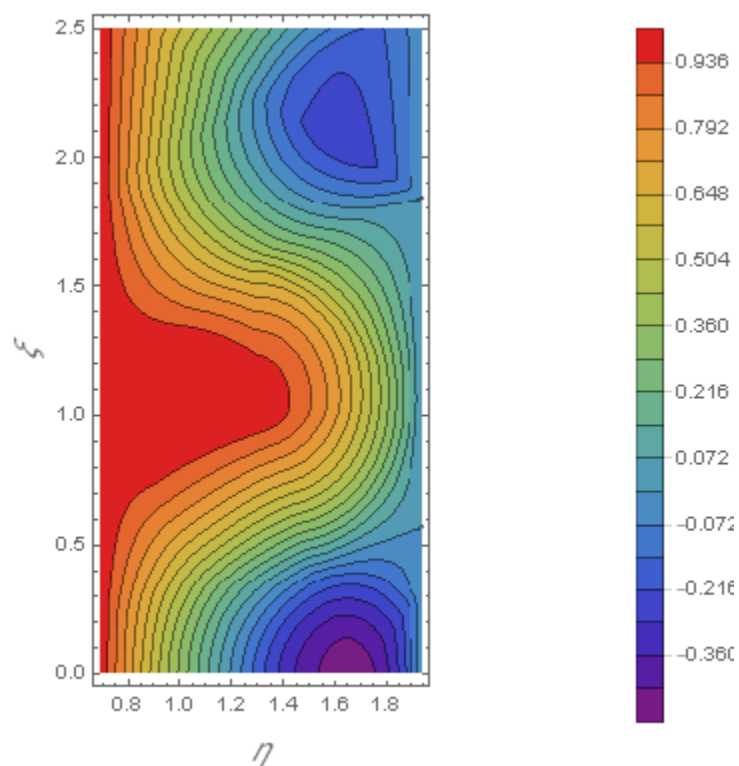


Figure 2:- Isotherme pour Richardson égale à 0.0001.

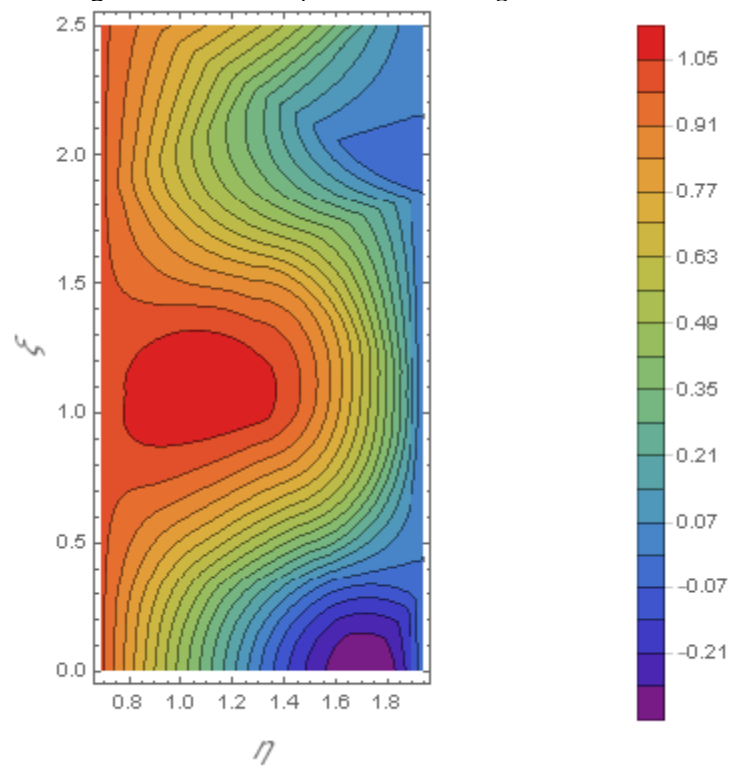


Figure 3:- pour Richardson égale à 0.1.

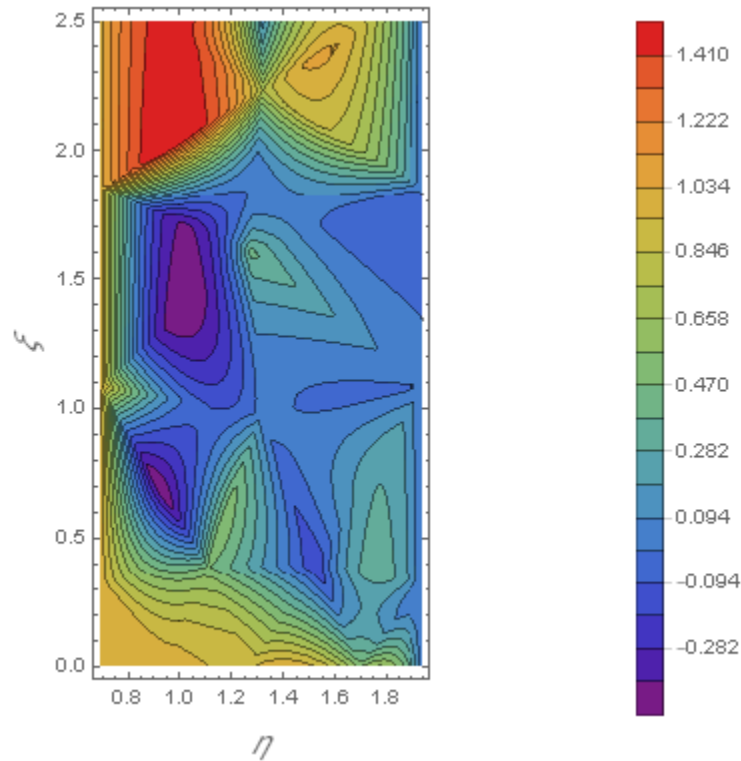


Figure 4:- Pour Richardson égale à 10.

Nous observeront alors que pour un nombre de Reynolds égale à 1 , les cellules de Benard sont observés en suivant le CAL pour de faibles nombre de Richardson. Cependant, le système devient chaotique pour de grands nombres de Richardson (pour Richardson supérieure à 10)

b-pour Reynolds égale à 0.1 :

Dans ce cas, Peclet=0.07 .

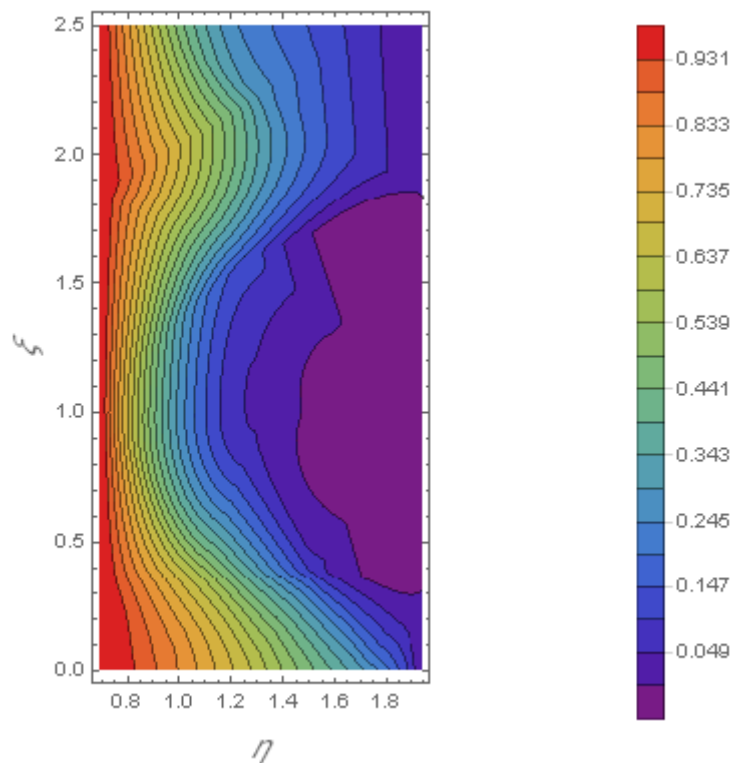


Figure 5:- Pour Richardson égale à 10.

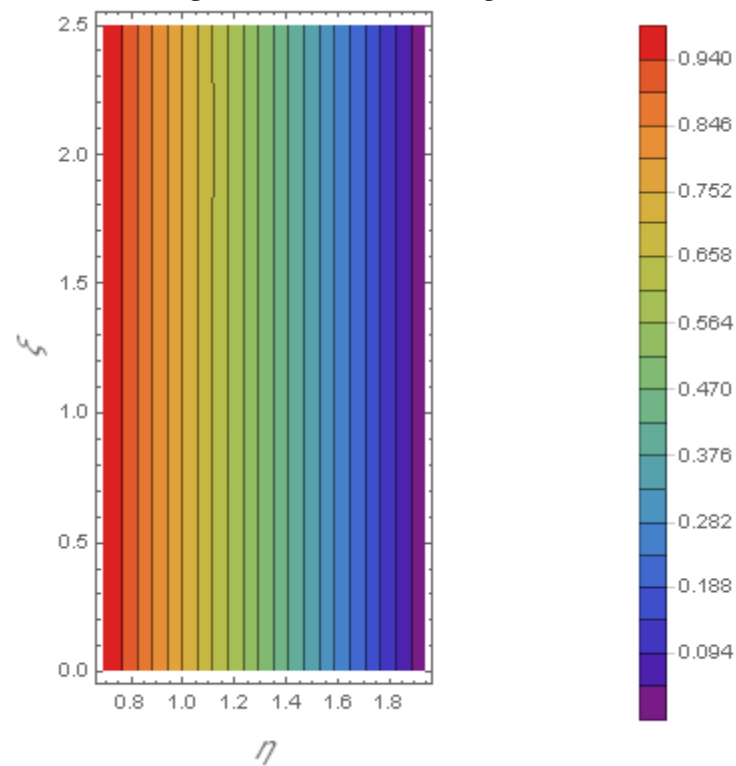


Figure 6:- pour Richardson égale à 1.

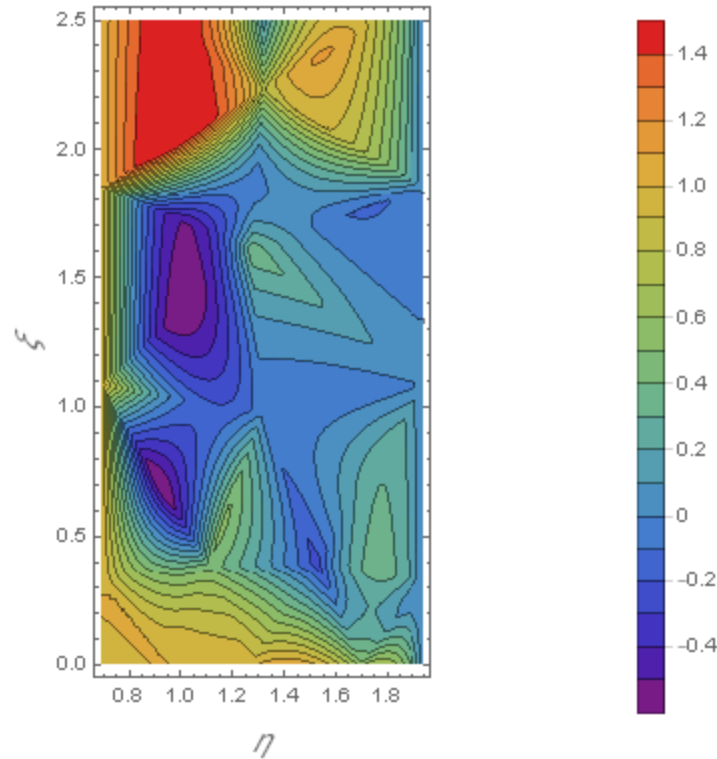


Figure 7:- pour Richardson égale à 100.

Pour un nombre de Reynolds égale à 0.1 , les cellules de Benard sont observés assez lentement par rapport au nombre de Richardson. Les cellules se forme lentement quand le nombre de Richardson augmente, pour ensuite devenir chaotique audela de $Ri=100$.

Modélisation numérique :Pour la fonction courant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_{pert}}{\partial t} + \frac{1}{H^2} * \left(\left[\frac{r_i * \omega_c}{\eta_i - \eta_e} * (\eta - \eta_e) * \frac{\partial \Omega_{pert}}{\partial \eta} \right] \right) \\ = \frac{1}{R_e} * \frac{1}{H^2} \left[\frac{\partial^2 \Omega_{pert}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Omega_{pert}}{\partial \epsilon^2} \right] + \frac{1}{H^2} * \frac{1}{(\eta_e - \eta_i)} * (1 - \cos(\epsilon) \sinh(\eta)) \end{aligned}$$

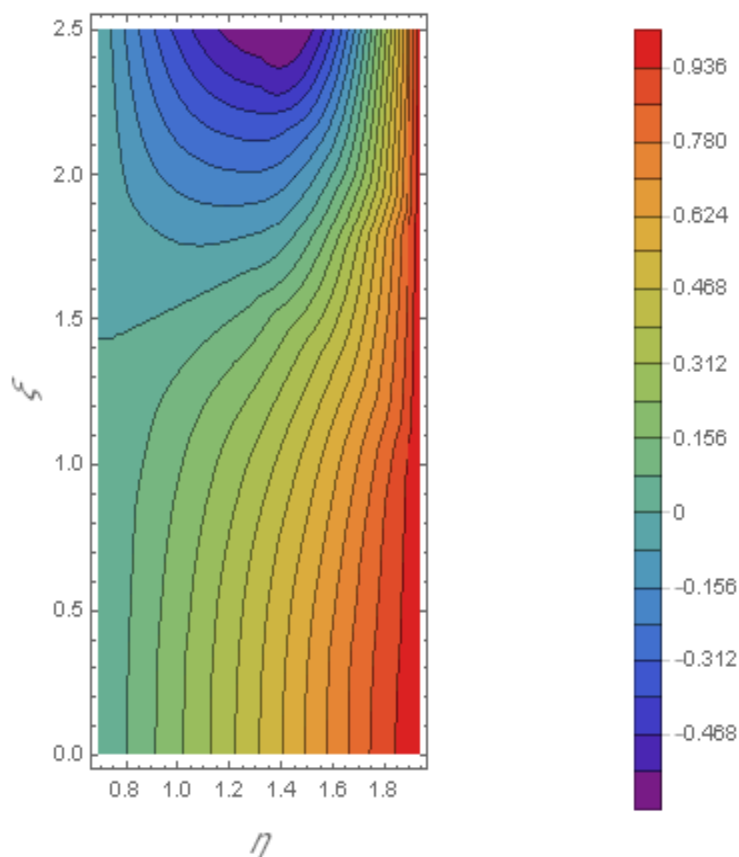


Figure 8:- Pour Reynolds égale à 1.

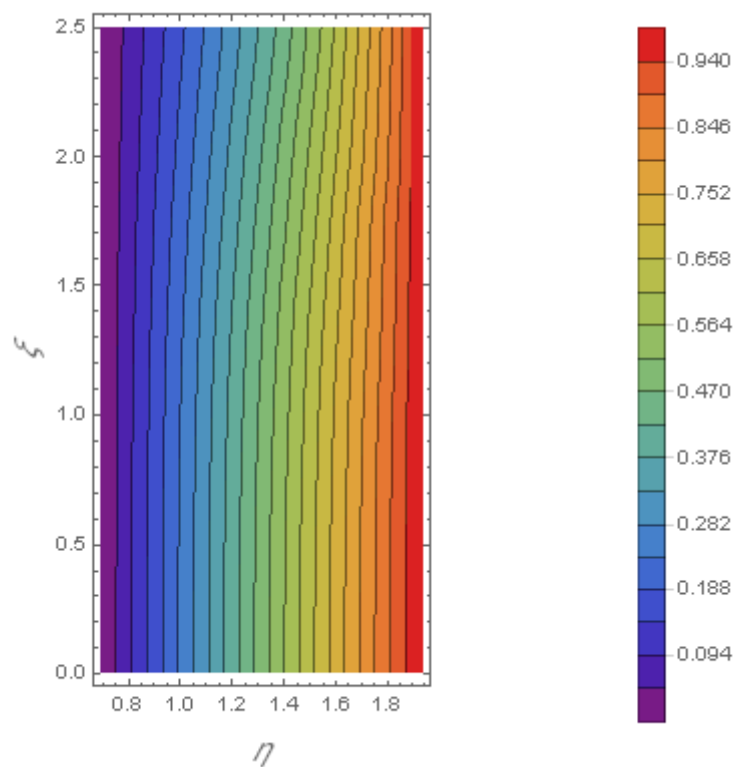


Figure 9:- pour Reynolds egale à 0.1.

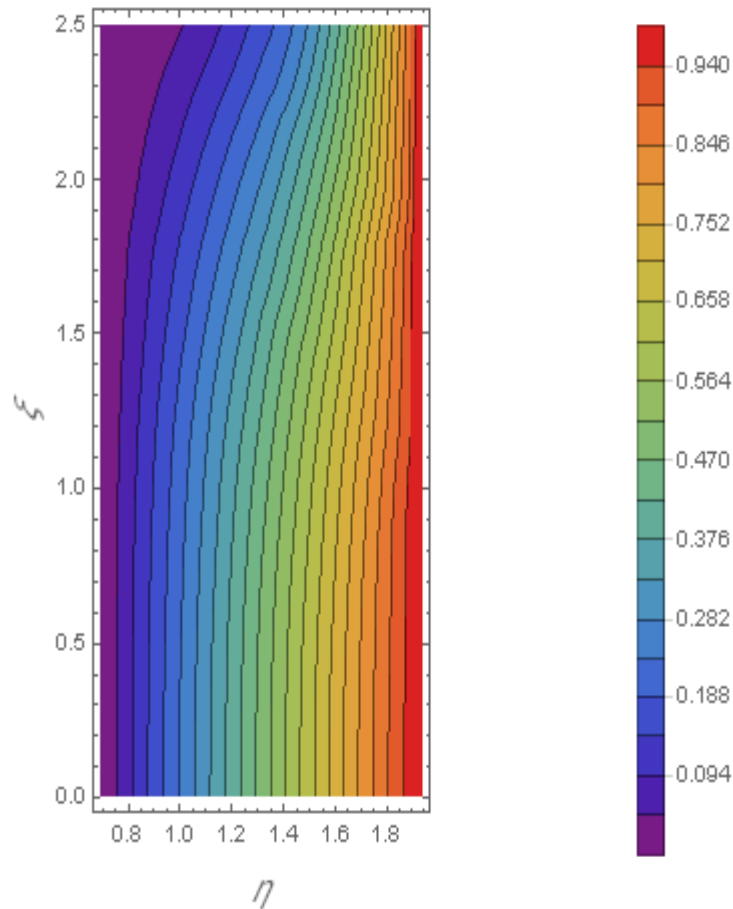


Figure 10:- pour Reynolds egale à 0.3.

Concernant la simulation de la fonction courant, nous avons eu à observer un système stable pour des nombre de Reynolds inférieur à 0.3 et au deladeceseuil , le système devient perturbé et chaotique.

simulation de notre modele :
Rappelons le modele obtenu

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial t} = 2.87 * Y(t) * X(t) + \frac{29,67}{Re} * Y(t) \\ \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{16.81}{Re} * X(t) + 0.23 * R_i * Y(t) - 0.21 \end{cases}$$

Après simulation numerique on a :

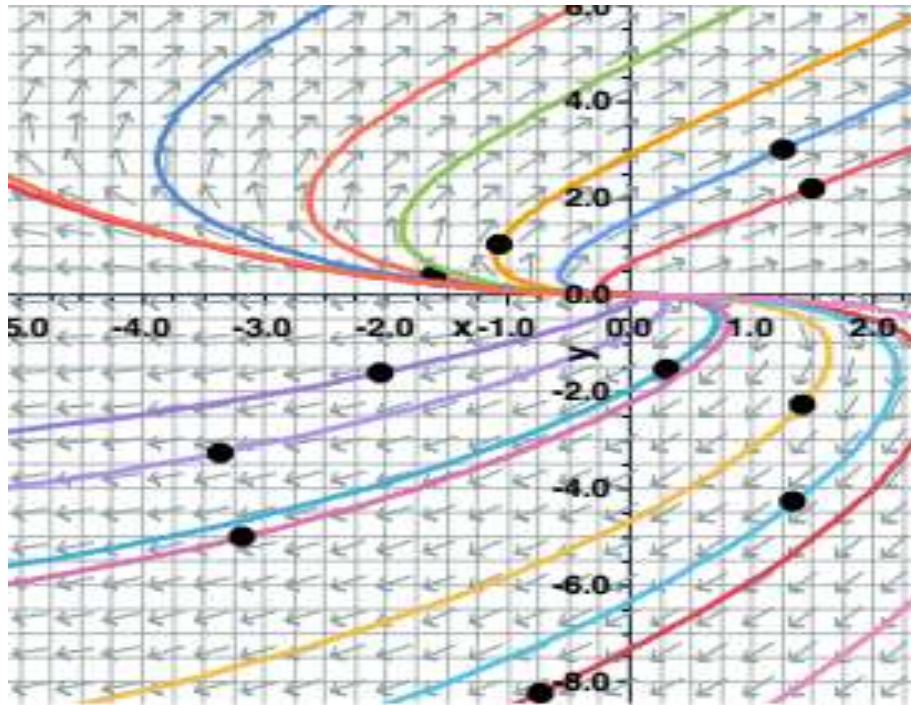


Figure 11:- Representation du système avec x (axe des abscisses) et y (axe des ordonnées) pour Richardson égale à 100 et Reynolds 1.

Cette figure nous permet de voir que deux points assez proches ont des trajectoires très distinctes, d'où la présence du chaos et nous noterons que ces résultats sont observés dans le repère bipolaire alors si nous revenions dans le repère cartésien, il est clair que le chaos se ferait beaucoup plus sentir.

Nous avons ainsi pu montrer que notre système était bien chaotique !

Et ce résultat n'est rien d'autre qu'une solution de notre problème parmi tant d'autres !

Notre système est très sensible aux conditions aux limites.