



Journal Homepage: [-www.journalijar.com](http://www.journalijar.com)

INTERNATIONAL JOURNAL OF ADVANCED RESEARCH (IJAR)

Article DOI:10.21474/IJAR01/21395

DOI URL: <http://dx.doi.org/10.21474/IJAR01/21395>



RESEARCH ARTICLE

DOBLETE CEMENTADO Y PATRONES DE DIFRACCIÓN DE TRANSFORMADA DE FOURIER DE FRECUENCIAS ESPACIALES MAXIMAS.

CEMENTED DOUBLET LENS AND DIFFRACTION PATTERNS OF THE MAXIMUM SPATIAL FREQUENCIES OF THE FOURIER TRANSFORM

Esteban Andres Zarate and Quintiliano Angulo Cordova

1.Division Academica de Ciencias Basicas, Universidad Juarez Autónoma de Tabasco, Cunduacan, Tabasco,
Mexico.

Manuscript Info

Manuscript History

Received: 12 May 2025

Final Accepted: 15 June 2025

Published: July 2025

Key words: -

doublet cemented lens, angular
spectrum, diffraction, maximum spatial
frequencies

Abstract

In this research, with the incorporation of propagation method concepts of the angular spectrum, and considering the effect produced by the finite apertures of a transforming lens/cemented doublet spherical lens on the amplitude distribution of the diffracted electric field which influences on it, produced by an extended object illuminated with plane waves; the diffraction mathematical model of the Fourier transform of the maximum spatial frequencies was obtained. The experimental results are presented; they are based on diffraction pattern images in intensity distribution engraving in specific conditions through the photographic method and using rectangular geometry apertures as diffractor objects

"© 2025 by the Author(s). Published by IJAR under CC BY 4.0. Unrestricted use allowed with credit to the author."

Introduction: -

El fenómeno de difracción ocurre donde quiera que un frente de onda electromagnética es obstruido, es decir, si en el transcurso de su trayectoria de propagación interacciona con objetos opacos o transparentes, se alteran porciones de dicho frente en amplitud o en fase. Los diferentes segmentos del frente de onda que se propagan más allá del objeto u objetos interfieren y producen una densidad de energía particular, cuya distribución espacial de intensidad se denomina patrón de difracción Zarate, (2011). Debido a la extensión finita de la pupila asociada a una lente esférica o transformadora, existen dos problemas principales, el efecto de vignetado y la capacidad de propagar frecuencias espaciales mayores a un valor particular, que surgen en la propagación del campo de difracción, al incidir en la lente transformadora. Zarate y Cornejo, (2011) publicaron una solución a estos problemas, a través de una función de amplitud definida como una integral de convolución de frecuencias espaciales máximas, distribuida en un plano a la entrada de una lente esférica. Se reporta el análisis de la propagación del campo de difracción de frecuencias espaciales máximas, a través de un doblete cementado o lente transformadora; así como su propagación hasta el plano en el que finalmente se distribuye.

Corresponding Author: -Esteban Andrés Zarate

Address: -Division Académica de Ciencias Basicas, Universidad Juarez Autonoma de

tica Fisiológica,
s con las

relaciones entre frecuencias de corte y límites de resolución que se utilizan en ambas disciplinas; además muestran una aplicación de la teoría de Fourier en el diseño óptico de microscopios limitados por producción y otra en pruebas de la calidad visual en sensibilidad al contraste. Zarate, (2011) en su trabajo de Tesis doctoral dio referencia al uso de un doblete cementado como lente transformadora y frecuencias espaciales paraxiales. Zarate *et al* (2019) reportaron un análisis teórico de propagación mediante el método del espectro angular y la producción en forma experimental de patrones de difracción con frecuencias espaciales paraxiales, de distribución de irradiancia tipo Bessel de orden cero y de primer orden. Los autores antes referidos no proporcionan información respecto a frecuencias máximas.

Descripción del método: -

Se hace uso del método de propagación del espectro angular para producir el modelo matemático de difracción. Para esto, se considera una abertura o un objeto difractor delgado como se ilustra en la figura 1. Zarate y Cornejo, (2011) establecieron que la distribución del campo difractado por el objeto es:

$$E_1(x_0, y_0) = E_0 t_0(x_0, y_0) \quad (1)$$

Mientras que la propagación del campo hasta el plano xy justo a la entrada del doblete cementado tomaron en cuenta la aceptación de una frecuencia espacial de valor máximo, producida por la sección eficaz finita de la lente esférica transformadora, tiene una distribución de amplitud descrita por la expresión,

$$E_{d0}(x, y) = \frac{E_0 e^{ikd_0}}{i\lambda d_0} e^{\frac{ik}{2d_0}(x^2+y^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_0(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2d_0}(x_0^2+y_0^2)} e^{-i2\pi(u_{max} x_0 + v_{max} y_0)} dx_0 dy_0 \quad (2)$$

Zarate y Cornejo, (2011) propusieron que $(x + x_2) \ll d_0$ y $(y + y_2) \ll d_0$, entonces las frecuencias espaciales máximas se escriben en términos de las frecuencias espaciales paraxiales $\frac{x}{\lambda d_0}$ y $\frac{y}{\lambda d_0}$; y las frecuencias espaciales no paraxiales $\frac{x_2}{\lambda d_0}$ y $\frac{y_2}{\lambda d_0}$, en la forma:

$$u_{max} = \frac{x}{\lambda d_0} + \frac{x_2}{\lambda d_0} \quad (3), \quad v_{max} = \frac{y}{\lambda d_0} + \frac{y_2}{\lambda d_0} \quad (3)$$

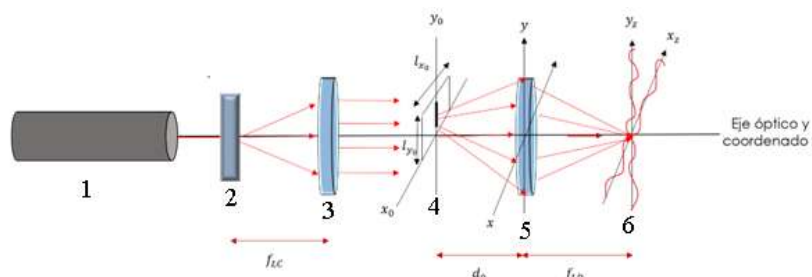


Figura 1. Esquema óptico: 1) Láser, 2) filtro, 3) colimador, 4) objeto difractor, 5) lente transformadora, 6) plano de distribución.

En su trabajo de Tesis Doctoral de Zarate, (2011) estableció que la distribución de amplitud del campo difractado y propagado a través del doblete cementado, bajo la condición de que la forma geométrica asociada a la lente transformadora sea $\text{circ} \left[\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a} \right] = 1$ y que además no posea aberraciones, es decir que la función de aberración sea $W(x, y) = 0$, puede ser descrita con la siguiente ecuación:

$$E_l(x, y) = \frac{E_0 e^{ik[f_{LD} + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]}}{i\lambda d_0 f_{LD}} e^{ik\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)\left(\frac{1}{d_0} - \frac{1}{f_{LD}}\right)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_0(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2d_0}(x_0^2+y_0^2)} e^{-i2\pi[u_{max} x_0 + v_{max} y_0]} dx_0 dy_0 \quad (4)$$

Mientras que, el campo propagado una distancia Z del plano xy al plano $x_z y_z$ en el que se distribuye definitivamente, después de operar y separar la dependencia de x, y y x_0, y_0 de se obtiene la expresión:

$$E_z(x_z, y_z) = \frac{E_0 e^{ik[d_0 + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]}}{i^2 \lambda^2 z d_0} e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2 + y_z^2)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_0(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2d_0}(x_0^2 + y_0^2)} e^{-i2\pi\left(\frac{x_2}{\lambda d_0} x_0 + \frac{y_2}{\lambda d_0} y_0\right)} dx_0 dy_0 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ik}{2}(x^2 + y^2)\left(\frac{1}{d_0} + \frac{1}{z} - \frac{1}{f}\right)} e^{-i2\pi\left[\left(\frac{x}{\lambda d_0} + \frac{x_z}{\lambda z}\right)x + \left(\frac{y}{\lambda d_0} + \frac{y_z}{\lambda z}\right)y\right]} dx dy \quad (5)$$

Para realizar la integración se propone los aspectos siguientes $u_2 = \left(\frac{x_0}{\lambda d_0} + \frac{x_z}{\lambda z}\right)$, $v_2 = \left(\frac{y_0}{\lambda d_0} + \frac{y_z}{\lambda z}\right)$, $d_0 = f_{LD}$ así como la ecuación integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2 - \beta x} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}$ Spiegel, (1980). Después de realizar operaciones y de simplificar se determina la ecuación siguiente:

$$E_z(x_z, y_z) = \left[\frac{E_0 e^{ik[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]}}{i\lambda f_{LD}} \right] e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2 + y_z^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_0(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2f_{LD}}(x_0^2 + y_0^2)\left(1 - \frac{z}{f_{LD}}\right)} e^{-i2\pi\left(\frac{x_2}{\lambda f_{LD}} + \frac{x_z}{\lambda z}\right)x_0 + \left(\frac{y_2}{\lambda f_{LD}} + \frac{y_z}{\lambda z}\right)y_0} dx_0 dy_0 \quad (6)$$

Utilizando las frecuencias espaciales máximas definidas como $u_{max} = \left(\frac{x_2}{\lambda f_{LD}} + \frac{x_z}{\lambda z}\right)$ y $v_{max} = \left(\frac{y_2}{\lambda f_{LD}} + \frac{y_z}{\lambda z}\right)$ la ecuación (7) se reescribe en la forma:

$$G_z(u_{max}, v_{max}) = \frac{E_0 e^{ik[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]}}{i\lambda f_{LD}} e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2 + y_z^2)} \mathfrak{F} \left\{ t_0(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2f_{LD}}(x_0^2 + y_0^2)\left(1 - \frac{z}{f_{LD}}\right)} \right\}_{u_{max}, v_{max}} \quad (7)$$

Proponiendo ahora que la distribución del campo $G_z(u_{max}, v_{max})$ se realice a la distancia focal posterior del doblete cementado, es decir $Z = f_{LD}$, se tendrá que la transformada de Fourier del producto de funciones es la

convolución de ellas, esto es $[\mathfrak{I}\{t_0(x_0y_0)\} \otimes \mathfrak{I}(1,1)]_{u_{max}, v_{max}} = \mathfrak{I}\{t_0(x_0y_0)\} \otimes \delta(u_{max}, v_{max}) = \mathfrak{I}\{t_0(x_0y_0)\}$ Gaskill, (1978), con estas condiciones podemos expresar a la ecuación (8) como:

$$G_z(u_{max}, v_{max}) = \frac{E_0 e^{ik[2f_{LD} + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2 + y_z^2)}}{i\lambda f_{LD}} \mathfrak{I}\{t_0(x_0y_0)\}_{u_{max}, v_{max}} \quad (8)$$

La ecuación (8) se interpreta como el espectro de difracción de transformada de Fourier de la función de transmitancia $t_0(x_0y_0)$ asociada al objeto difractor, con distribución en el espacio de Fourier de frecuencias máximas u_{max}, v_{max} . Se ha propagado desde el plano objeto una longitud de camino óptico dado por la siguiente expresión $2f_{LD} + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}$; además su distribución esférica de fase dada por el exponente del factor $e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2 + y_z^2)}$ y está desfasado en $\frac{\pi}{2}$ radianes.

Resultados teóricos: -

Para obtener resultados teóricos específicos la forma funcional del modelo de difracción para el caso donde consideramos una abertura rectangular de base l_x , altura l_y y de un pequeño espesor l_z figura 2, se utiliza la función rectangular: $t_0(x_0y_0) = l_z \left[\left(l_y \text{rect} \left(\frac{x_0}{l_x} \right) \right) \left(l_x \text{rect} \left(\frac{y_0}{l_y} \right) \right) \right]$, donde de acuerdo con su definición la podemos expresar de la siguiente forma Gaskill, (1978):

$$t_0(x_0, y_0) = \text{rect} \left(\frac{x_0}{l_x}, \frac{y_0}{l_y} \right) = \begin{cases} 1, & \text{si } -\frac{l_x}{2} \leq x_0 \leq \frac{l_x}{2}, -\frac{l_y}{2} \leq y_0 \leq \frac{l_y}{2} \\ \frac{1}{2}, & \text{si } |x_0| = \frac{l_x}{2}, \dots, |y_0| = \frac{l_y}{2} \\ 0, & \text{en otro lado.} \end{cases} \quad (9)$$

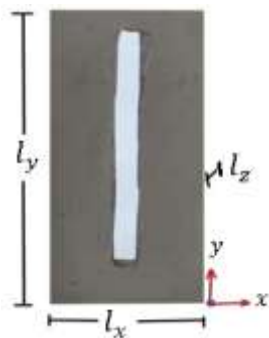


Figura 2. Abertura rectangular.

La transformada de Fourier bidimensional se determina usando el teorema de escalamiento quedando en la forma $\mathfrak{I}\{t_0(x_0y_0)\}_{u_{max}, v_{max}} = l_z [l_y l_x \text{sinc}(l_x u_{max})] [l_x l_y \text{sinc}(l_y v_{max})]$ Gaskill, (1978). Al sustituir este resultado en la ecuación (8) se determina la expresión:

$$G_z(u_{max}, v_{max}) = \frac{E_0 l_z (l_x l_y)^2 e^{ik[2f_{LD} + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2 + y_z^2)}}{i\lambda f_{LD}} \text{sinc}(l_x u_{max}, l_y v_{max}) \quad (10)$$

La distribución del campo de difracción en el espacio de frecuencias espaciales es una función seno cociente distribuida en el espacio de frecuencias espaciales máximas definida por la ecuación (11). La distribución de intensidad es:

$$I_z(u, v) = \left(\frac{E_0 l_z}{\lambda f_{LD}} \right)^2 (l_x l_y)^4 [\sin^2(l_x u_{max}, l_y v_{max})] \quad (11)$$

Resultados experimentales: -

Para comprobar el modelo matemático de intensidad de la ecuación (11), se hizo uso del método experimental mediante la implementación del arreglo óptico coherente ilustrado en la figura 3, que se describe en la forma siguiente: el haz de luz de láser de He-Ne ($\lambda = 632\text{nm}$) proveniente de la cavidad (1), es ampliado y filtrado de ruido óptico en (2) con un lente objetivo de microscopio 40x y un pinhole de $50\mu\text{m}$ de diámetro. Después el haz se propaga e incide sobre la lente colimadora (3), el cual es un doblete cementado de 25 cm de distancia focal, produciéndose aquí frentes de ondas planas, con una amplitud constante; mismos que iluminan al objeto difractor (4). Las ondas de luz difractadas por el objeto se propagan hasta incidir sobre la lente transformadora (5), que también es un doblete acromático cementado de distancia focal 30cm; mismo que propaga el campo de ondas difractado hasta el plano de distribución (6) en el cual se distribuye y fotografía el patrón de difracción en intensidad.

Se usaron tres aberturas rectangulares como objetos difractores como se muestra en la figura 2, con el mismo espesor $l_z = 0.5\text{mm}$, fabricadas a mano en lámina de aluminio. La imagen de la figura 4 corresponde al patrón de difracción producido por una abertura rectangular con dimensiones lineales $l_x = 2\text{mm}$ de ancho y $l_y = 3\text{cm}$ de altura, a la distancia focal de $f_{LD} = 30\text{cm}$ del doblete cementado, con un tiempo de exposición de $(1/4000)\text{s}$. En tanto que la imagen de la figura 5, es la del patrón de difracción en distribución de intensidad, de una segunda abertura rectangular con dimensiones lineales $l_x = 8\text{mm}$ de ancho y de altura $l_y = 3\text{cm}$, el tiempo de exposición fue también de $(1/4000)\text{s}$. La imagen de la figura 6 corresponde al patrón de difracción producido por una tercera abertura rectangular cuyas dimensiones lineales fueron $l_x = 3\text{cm}$ de ancho y de altura $l_y = 3\text{cm}$, el tiempo de exposición fue también de $(1/4000)\text{s}$. Cada patrón de difracción en distribución de intensidad fue grabado haciendo uso del método fotográfico con cámara electrónica de 18 megapíxeles.

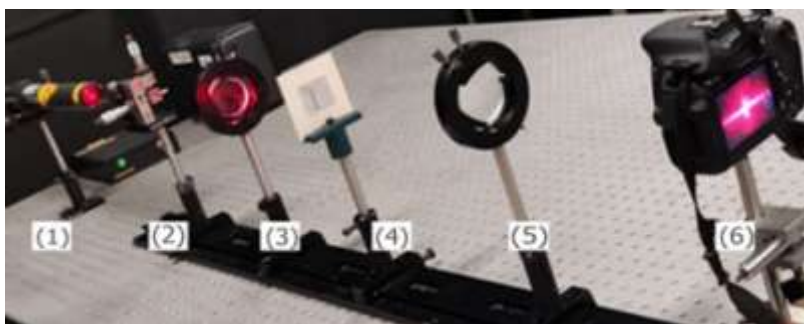


Figura 3. Arreglo óptico experimental: 1) Láser, 2) filtro, 3) colimador, 4) objeto difractor, 5) lente transformadora, 6) plano de distribución.



Figura 4, 5, 6. Patrones de difracción producidos con aberturas rectangulares de ancho $l_x = 2mm$; $l_x = 8mm$ y $l_x = 3cm$ respectivamente, con misma altura $l_y = 3cm$ y mismo espesor $l_z = 0.5mm$.

Conclusiones: -

El resultado teórico relevante es haber simplificado la distribución de amplitud del campo eléctrico asociado a las ondas difractadas definido por la ecuación (5), como una distribución de amplitud en el espacio de Fourier frecuencias espaciales máximas ver ecuación (8) y a su vez, ser interpretado como un caso especial de convolución de transformadas definido por la transformada de Fourier de la función de transmitancia asociada al objeto difractor. Este resultado demuestra la necesidad de realizar una etapa de simulación para resolver el problema de forma más completa.

En lo que respecta a los resultados experimentales, las imágenes de cada patrón de distribución de intensidad Figuras 4, 5 y 6 proporcionan información relevante, una de ellas es que conforme el ancho de cada abertura rectangular como objeto difractor variando los máximos y mínimos secundarios van disminuyendo, persistiendo los máximos centrales y algunos máximos y mínimos secundarios próximos a los centrales. Otro aspecto que resulta relevante es que a los objetos difractores se les asocia una función matemática, pero ellos no poseen geometría rectangular perfecta, ya que fueron producidos de forma manual y no con un método de fracturado especial. Resulta interesante que las deformaciones que muestra la distribución de las franjas de máxima y mínima tienen una forma que permite visualizar los defectos de la abertura en sus dimensiones lineales.

Referencias: -

1. Zarate E. A. (2011), Estudio de patrones de difracción en la evaluación de Aberturas (Tesis Doctoral). Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica, Santa María Tonantzintla, Puebla, Mexico. 5-190.
2. Zarate Esteban Andres, Cornejo Rodríguez Alejandro (2011), La abertura de una lente, su efecto en el espectro de difracción, frecuencia espacial y viñeteado. Revista Mexicana de Física. 57, 491-498.
3. Camestri S. A., Simon J. M., Martín G., Colombo E., Issolio L., Santillan J., Aguirre R. (2007), Definición y uso de frecuencias espaciales en Óptica de Fourier y en Óptica Fisiológica, Óptica pura y aplicada 40(1), 119-128.
4. Zarate Esteban Andres, Angulo Córdova Quintiliano, Gutierrez Tepach Gerardo, y Hernandez Nolasco Jose Adan (2019), Modelo matemático de difracción en región convergente y divergente de una lente esférica. Revista Mexicana de Física 65, 299-306.
5. Spiegel Murray R. (1980), Cálculo superior, McGraw-Hill.
6. Gaskill Jack. D. (1978), Linear systems Fourier transforms and optics, John Wiley and Sons, 150-217